

Кинематика прямолинейного движения точки

April, 2015

Методические указания для решения задач

Система координат

- ▶ Направить координатную ось s вдоль пути и определить начало отсчета t_0 и положительное направление
- ▶ Положение точки, её скорость и ускорение - это скалярные величины. Направление этих величин определяется алгебраическим знаком
- ▶ Положительное направление для s , v , a указывается стрелкой рядом с кинематическим уравнением

Уравнения кинематики

- ▶ Если известны соотношения между двумя из четырех переменных: a , v , s , t , то третью переменную можно получить с помощью трех уравнений кинематики:
 $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ и $ads = vdv$
- ▶ Для вычисления интегралов в кинематических уравнениях, необходимы начальные условия: $s = s_0$ и $v = v_0$, когда $t = 0$

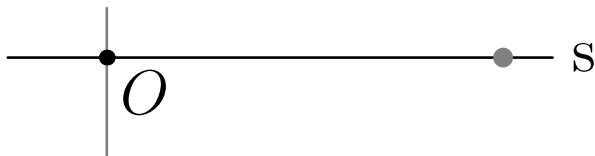
Пример

Автомобиль движется прямолинейно так, что $v = (3t^2 + 2t)$ м/с, здесь t измеряется в секундах. Найти положение автомобиля и его ускорение, когда $t = 3$ с. При $t = 0 : s = 0$



Решение

Координатная ось



Положение автомобиля

$$\left(\overset{+}{\rightarrow}\right) \quad v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t) dt$$

$$s|_0^s = t^3 + t^2|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

Когда $t = 3$ с

$$s = 3^3 + 3^2 = 36 \text{ м} \quad \text{Ответ}$$

Ускорение

$$\begin{aligned} (\vec{+}) \quad a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t) \\ &= 6t + 2 \end{aligned}$$

Когда $t = 3$ с

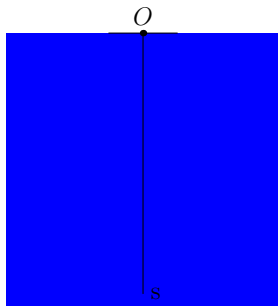
$$a = 6(3) + 2 = 20 \text{ м/с}^2 \quad \text{Ответ}$$

Пример

Небольшой снаряд был выпущен вертикально вниз в воду с начальной скоростью 60 м/с. Благодаря сопротивлению воды снаряд испытывает замедление с ускорением $a = (-0.4v^3)$ м/с², где v измеряется в м/с. Найти положение снаряда и его скорость спустя 4 с после начала движения

Решение

Координатная ось



Скорость

$$v = v_0 + a_c t??$$

$$(+ \downarrow) \quad a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60 \text{ M/c}}^v \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4} \left(\frac{1}{-2} \right) \frac{1}{v^2} \Big|_{60}^v = t - 0$$

$$\frac{1}{0.8} \left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{60^2} \right] = t$$

Скорость

$$v = \left(\left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{-1/2} \right) \text{ м/с}$$

Когда $t = 4$ с:

$$v = 0.559 \text{ м/с} \downarrow$$

Положение

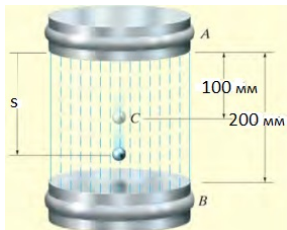
$$\begin{aligned} (+ \downarrow) \quad v &= \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{-1/2} \\ \int_0^s ds &= \int_0^t \left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{-1/2} dt \\ s &= \frac{2}{0.8} \left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{1/2} \Big|_0^t \\ s &= \frac{1}{0.4} \left(\left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{1/2} - \frac{1}{60} \right) \text{ м} \end{aligned}$$

Когда $t = 4$ с:

$$s = 4.43 \text{ м}$$

Пример

Металлическая частица под действием магнитного поля между пластинами A и B падает вертикально вниз. Частица начинает движение из состояния покоя в точке C, $s = 100$ мм, с ускорением $a = 4s \text{ м/с}^2$, где s измеряется в метрах. Определить скорость частицы, когда она достигнет пластины B, $s = 200$ мм, и время, за которое частица пройдет этот путь



Решение. Скорость

$$(+ \downarrow) \quad vdv = ads$$

$$\int_0^v vdv = \int_{0.1M}^s 4sds$$

$$\frac{1}{2}v^2 \Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2 \Big|_{0.1M}^s$$

$$v = 2(s^2 - 0.01)^{1/2} \text{ м/с}$$

Когда $s = 200 \text{ мм} = 0.2 \text{ м}$:

$$v_B = 0.346 \text{ м/с} = 346 \text{ мм/с} \downarrow \quad \text{Ответ}$$

Время

Когда $t = 0 : s = 0.1$ м

$$\begin{aligned} (+ \downarrow) \quad ds &= v dt \\ &= 2(s^2 - 0.01)^{1/2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0.1}^s \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} &= \int_0^t 2 dt \\ \ln(\sqrt{s^2 - 0.01} + s) \Big|_{0.1}^s &= 2t \Big|_0^t \\ \ln(\sqrt{s^2 - 0.01} + s) + 2.303 &= 2t \end{aligned}$$

Ответ

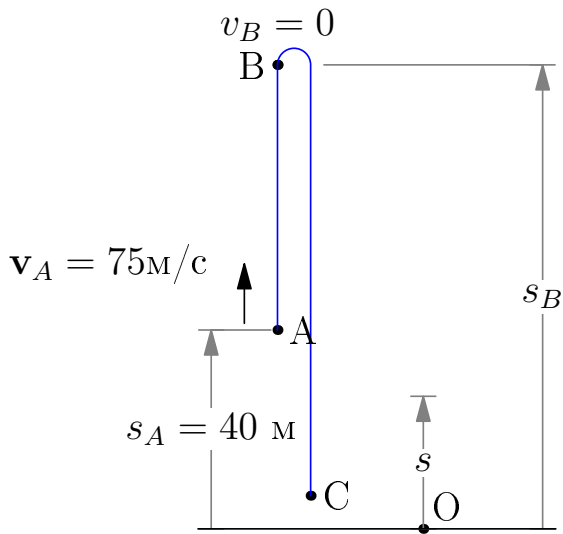
Когда $s = 0.2$ м:

$$t = \frac{\ln(\sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2) + 2.303}{2} = 0.658 \text{ с}$$

Пример

Во время теста ракета стартовала со скоростью 75 м/с и когда она поднялась на высоту 40 м отказал двигатель. Рассчитать максимальную высоту s_B , которую достигнет ракета и ее скорость перед столкновением с землей. Во время движения на ракету действует постоянное, направленное вертикально вниз ускорение свободного падения 9.81 м/с^2 . Сопротивление воздуха не учитывать

Модель



Решение. Максимальная высота

Когда $t = 0$: $v_A = +75$ м/с

Когда $s = s_B$: $v_B = 0$

$a_c = -9.81$ м/с² - постоянное ускорение

$$(+ \uparrow) \quad v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$

$$0 = (75 \text{ м/с})^2 + 2(-9.81 \text{ м/с}^2)(s_B - 40 \text{ м})$$

$$s_B = 327 \text{ м}$$

Ответ

Скорость

$$\begin{aligned} (+ \uparrow) \quad v_C^2 &= v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B) \\ &= 0 + 2(-9.81 \text{ м/с}^2)(0 - 327 \text{ м}) \\ v_C &= -80.1 \text{ м/с} = 80.1 \text{ м/с} \downarrow \end{aligned}$$

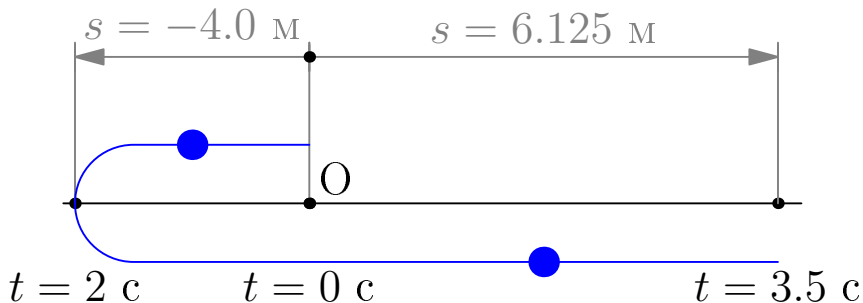
Ответ

$$\begin{aligned} (+ \uparrow) \quad v_C^2 &= v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A) \\ &= (75 \text{ м/с})^2 + 2(-9.81 \text{ м/с}^2)(0 - 40 \text{ м}) \\ v_C &= -80.1 \text{ м/с} = 80.1 \text{ м/с} \downarrow \end{aligned}$$

Ответ

Пример

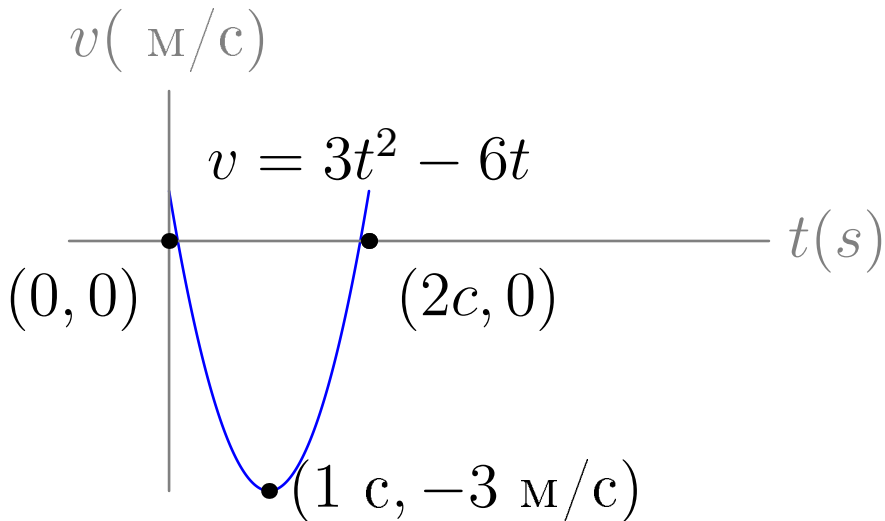
Частица движется по горизонтальному пути со скоростью $v = (3t^2 - 6t)$ м/с, здесь t измеряется в секундах. В начале движения частица находится в точке O . Найти расстояние пройденное за 3.5 секунды, среднюю скорость частицы и ее общую среднюю скорость



Решение. Расстояние

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{+}) \quad ds &= v dt \\ &= (3t^2 - 6t) dt \\ \int_0^s ds &= \int_0^t (3t^2 - 6t) dt \\ s &= (t^3 - 3t^2) \text{ м}\end{aligned}$$

Расстояние



Расстояние

$$s|_{t=0} = 0 \quad s|_{t=2c} = -4.0 \text{ м} \quad s|_{t=3.5c} = 6.125 \text{ м}$$

$$s_O = 4.0 + 4.0 + 6.125 = 14.125 \text{ м} = 14.1 \text{ м} \quad \text{Ответ}$$

Скорость

$$\Delta s = s|_{t=3.5c} - s|_{t=0} = 6.125 \text{ м} - 0 = 6.125 \text{ м}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.125 \text{ м}}{3.5c - 0} = 1.75 \text{ м/с} \rightarrow \text{ОТВЕТ}$$

$$v_{cp} = \frac{sO}{\Delta t} = \frac{14.125 \text{ м}}{3.5c - 0} = 4.04 \text{ м/с} \text{ ОТВЕТ}$$

Ускорение

$$a = dv/dt = (6t - 6) \text{ м/с}^2$$

Задача 1

Начальная скорость автомобиля по прямолинейному шоссе равна 35 м/с. Автомобиль тормозит и его скорость уменьшается до 10 м/с за 15 секунд. Найти ускорение замедления автомобиля

Задача 2

Мяч летит вертикально вверх со скоростью 15 м/с. Найти время полета до возвращения мяча в первоначальное положение

Задача 3

Частица движется по прямолинейному пути со скоростью $v = (4t - 3t^2)$ м/с, где t измеряется в секундах. Найти ее положение, когда $t = 4$ с. При $t = 0 : s = 0$