Криволинейное движение точки

April, 2015

Методические указания для решения задач

Система координат

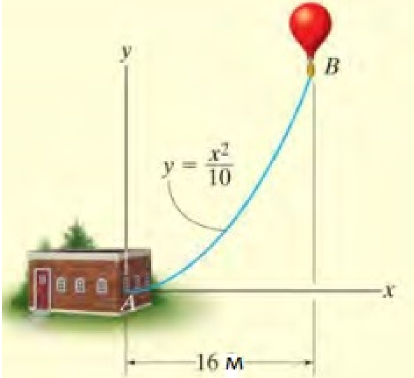
- Прямоугольную систему координат можно применять для решения задач, в которых кинематические уравнения удобно выразить через x, y, z компоненты

Кинематика

- Так как прямолинейное движение возможно вдоль каждой координатной оси, то для описания движения точки вдоль каждой оси можно применить $v = ds/dt$ и $a = dv/dt$. Если движение не может быть выражено как функция от времени, то использовать уравнение $ads = vdv$
- На плоскости уравнение траектории $y = f(x)$ можно использовать для вычисления x и y компонент скорости и ускорения
- Если x, y, z компоненты $\vec{v}$ и $\vec{a}$ определены, то величины этих векторов можно вычислить по теореме Пифагора, а также их направляющие координатные углы как компоненты единичных векторов

Пример

В любой момент времени горизонтальное положение воздушного шара определяется по формуле $x = 8t$ м, t измеряется в секундах. Уравнение траектории $y = x^2/10$. Найти величину и направление скорости и ускорения, когда $t = 2$ с



Решение.Скорость

$$v_x = \dot{x} = \frac{d8t}{dt} = 8 \text{ м/с} \rightarrow$$
$$v_y = \dot{y} = \frac{dx^2/10}{dt} = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25.6 \text{ м/с}$$

когда

$t = 2$ с

$$v = \sqrt{(8 \text{ м/с})^2 + (25.6 \text{ м/с})^2} = 26.8 \text{ м/с}$$ Отве

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6^\circ$$

Ускорение

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{d8}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} a_y = \dot{v}_y = \frac{d2x\dot{x}/10}{dt} &= (2\dot{x})\dot{x}/10 + 2x\ddot{x}/10 \\ &= 2(8^2)/10 + 2(16)(0)/10 = 12.8 \text{ м/с}^2 \uparrow \end{aligned}$$

Тогда

$$a = \sqrt{0^2 + (12.8)^2} = 12.8 \text{ м/с}^2 \qquad \text{Ответ}$$

$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{12.8}{0} = 90^\circ \qquad \text{Ответ}$$

Пример

Если промежуток времени небольшой, то траектория имеет уравнение $y = (0.001)x^2$. Аэроплан взлетает с постоянной скоростью. Найти величину его скорости и ускорения на высоте $y = 100$ м

Решение

Если $y = 100$ м, то $100 = 0.001x^2$ или $x = 316.2$ м
Так как $v_y = 10$ м/с, то

$$y = v_y t \quad 100 \text{ м} = (10 \text{ м/с})t \quad t = 10 \text{ с}$$

Скорость

$$v_y = \dot{y} = \frac{d(0.001x^2)}{dt} = (0.002x)\dot{x} = 0.002xv_x$$

Значит

$$10 \text{ м/с} = 0.002(316.2 \text{ м})v_x$$

$$v_x = 15.81 \text{ м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15.81 \text{ м/с})^2 + (10 \text{ м/с})^2} = 18.7 \text{ м/с} \quad \text{Ответ}$$

Ускорение

$$a_y = \dot{v}_y = 0.002\dot{x}v_x + 0.002x\dot{v}_x = 0.002(v_x^2 + xv_x)$$

Когда $x = 316.2$ м, то $v_x = 15.81$ м/с и $\dot{v}_y = a_y = 0$

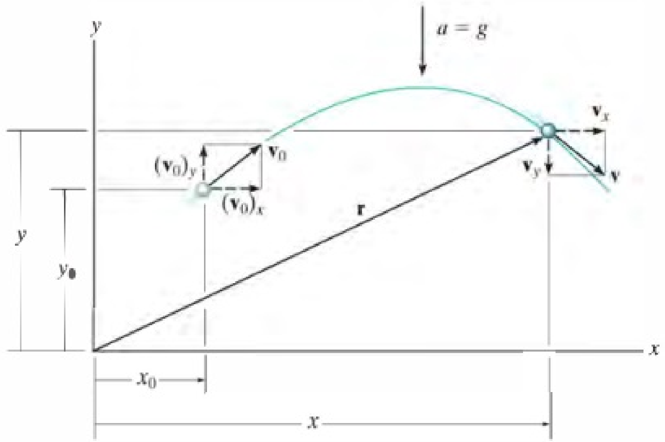
$$0 = 0.002((15.81 \text{ м/с})^2 + 316.2 \text{ м}(a_x))$$

$$a_x = -0.791 \text{ м/с}^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.791 \text{ м/с}^2)^2 + (0 \text{ м/с}^2)^2} = 0.791 \text{ м/с}^2$$

Ответ

Движение снаряда



Горизонтальное движение

$a_x = 0$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad v = v_0 + a_c t; \quad v_x = (v_0)_x$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2; \quad x = x_0 + (v_0)_x t$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(x - x_0); \quad v_x = (v_0)_x$$

Горизонтальная компонента скорости снаряда остается постоянной все время движения

Вертикальное движение

$$a_y = -g$$

$$(+\uparrow) \quad v = v_0 + a_c t; \quad v_y = (v_0)_y - gt$$

$$(+\uparrow) \quad y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2; \quad y = y_0 + (v_0)_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$(+\uparrow) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0); \quad v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$$

Методические указания для решения задач

Координатная система

- Определить неподвижные x, y координатные оси и нарисовать траекторию снаряда. Между двумя любыми точками на траектории внести данные задачи и указать три неизвестные. Во всех случаях ускорение земного притяжения направлено вертикально вниз и равно 9.81 м/с^2. Начальная и конечная скорость точки должна быть представлена их x, y компонентами
- Положительные и отрицательные компоненты положения точки, ее скорости и ускорения всегда направлены в соответствии с ассоциированной системой координат

Уравнения кинематики

- В зависимости от данных задачи и того, что нужно найти, надо сделать выбор трех из следующих четырех уравнений и применить их между двумя точками на траектории, чтобы получить прямое решение задачи

Горизонтальное движение

- Скорость в горизонтальном или x направлении постоянна,т.е.: $v_x = (v_0)_x$ и

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

Вертикальное движение

- В вертикальном или y направлении можно использовать только два из трех уравнений для решения задачи

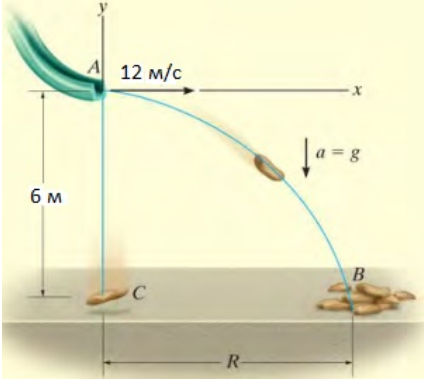
$$v_y = (v_0)_y + a_c t$$

$$y = y_0 + (v_0)_y t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$

Пример

Мешок скользит по скату с горизонтальной скоростью 12 м/с. Высота ската 6 метров от поверхности. Найти время за которое мешок падает на поверхность и расстояние R, на котором накапливаются мешки



Решение. Система координат

Компоненты начальной скорости: $(v_A)_x = 12$м/с и $(v_A)_y = 0$
Между точками А и В ускорение $a_y = -9.81$ м/с^2
Так как $(v_B)_x = (v_A)_x = 12$ м/с, то имеем три неизвестных $(v_B)_y$, R и время полета t_{AB}

Вертикальное движение

$$(+\uparrow) \quad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$

$$-6 \text{ м} = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-9.81 \text{ м/с}^2) t_{AB}^2$$

Ответ

$$t_{AB} = 1.11 \text{ с}$$

Горизонтальное движение

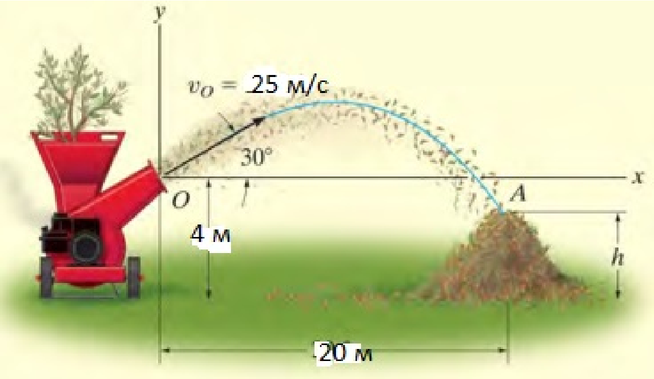
$$\begin{aligned} (\overset{+}{\rightarrow}) \quad x_B &= x_A + (v_A)_x t_{AB} \\ R &= 0 + 12\ \text{м/с}(1.11\ \text{с}) \end{aligned}$$

Ответ

$$R = 13.3 \text{ м}$$

Пример

Машина вырабатывает стружки и выбрасывает их со скоростью $v_O = 25$ м/с. Наклон трубы 30 градусов к горизонтали. Найти высоту h в месте, где накапливаются опилки, если оно находится на расстоянии 20 метров от трубы



Решение. Система координат

Три неизвестных: h, время полета t_{OA} и $(v_a)_y$. При этом $(v_A)_x = (v_O)_x$

$$(v_O)_x = (25\cos 30^\circ)\text{ м/с} = 21.65\text{ м/с} \rightarrow$$
$$(v_O)_y = (25\sin 30^\circ)\text{ м/с} = 12.5\text{ м/с} \uparrow$$

$(v_A)_x = (v_O)_x = 21.65$ м/с

Горизонтальное движение

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad x_A = x_O + (v_O)_x t_{OA}$$

Ответ

$$20 \text{ м} = 0 + (21.65 \text{ м/с})t_{OA}$$

$$t_{OA} = 0.9238 \text{ с}$$

Вертикальное движение

$$(+\uparrow) \quad y_A = y_O + (v_O)_y t_{OA} + \frac{1}{2} a_c t_{OA}^2$$

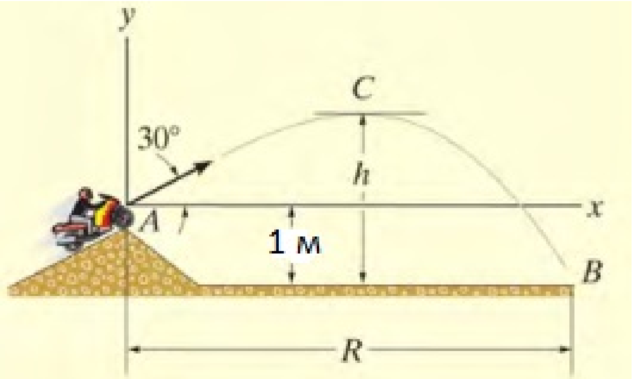
$$h - 4 \text{ м} = 0 + (12.5 \text{ м/с})(0.9238 \text{ с}) + \frac{1}{2}(-9.81 \text{ м/с}^2)(0.9238 \text{ с})^2$$

Пример

Этот трек, участок гоночной трассы, сделан так, что райдер взлетает под углом 30° с высоты 1 метр. Райдер совершает полет высоко в воздухе в течении 1.5 секунд. Найти его начальную, перед полетом, скорость, горизонтальное расстояние, которое пролетит райдер и максимальную высоту полета.

Пример (cont.)

Решение. Система координат



Три неизвестных: начальная скорость v_A, расстояние R и вертикальная компонента скорости $(v_B)_y$

Вертикальное движение

$$(+\uparrow) \quad y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2} a_c t_{AB}^2$$

Ответ

$$-1 \text{ м} = 0 + v_A \sin 30^\circ (1.5 \text{ с}) + \frac{1}{2}(-9.81 \text{ м/с}^2)(1.5 \text{ с})^2$$

$$v_A = 13.38 \text{ м/с} = 13.4 \text{ м/с}$$

Горизонтальное движение

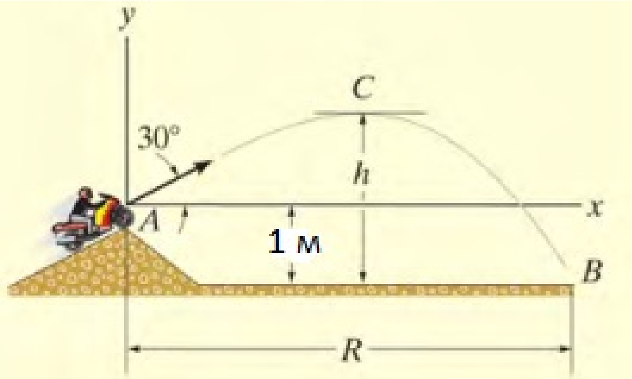
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB}$$

Ответ

$$R = 0 + 13.38 \cos 30^\circ \text{ м/с}(1.5 \text{ с})$$

$$R = 17.4 \text{ м}$$

Максимальная высота



Имеем три неизвестных: время t_{AC}, горизонтальное расстояние AC и h

$(v_C)_y = 0$

Максимальная высота

$$(v_C)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_c(y_C - y_A)$$

Ответ

$$0^2 = (13.38\ \text{м/с})^2 + 2(-9.81\ \text{м/с}^2)[(h - 1\ \text{м}) - 0]$$

$$h = 3.28\ \text{м}$$