

# Криволинейное движение точки

April, 2015

# Методические указания для решения задач

## Система координат

- ▶ Если известна траектория движения точки, можно определить естественную систему координат ( $n$  и  $t$  координатные оси) с началом в фиксированной точке, которая совпадает с движущейся точкой в данный момент времени
- ▶ Положительное направление тангенциальной оси совпадает с направлением движения, нормальная ось направлена к центру кривой

# Скорость

- ▶ Скорость точки всегда направлена по касательной к траектории
- ▶ Величина скорости:

$$v = \dot{s}$$

# Тангенциальное ускорение

- ▶ Тангенциальная компонента ускорения появляется в результате изменения величины скорости. Эта компонента действует в положительном направлении дуговой координаты  $s$ , если скорость точки увеличивается и в отрицательном направлении если скорость уменьшается
- ▶ Соотношения между  $a_t$ ,  $v$ ,  $t$  и  $s$ :

$$a_t = \dot{v}, \quad a_t ds = v dv$$

# Тангенциальное ускорение (cont.)

- ▶ Если  $a_t$  - постоянная величина, то

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(a_t)_c t^2$$

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2(a_t)_c (s - s_0)$$

# Нормальное ускорение

- ▶ Нормальная компонента ускорения это результат изменения направления скорости. Это ускорение всегда направлено к центру кривизны траектории точки, то есть в положительном направлении оси  $n$
- ▶ Величина нормального ускорения:

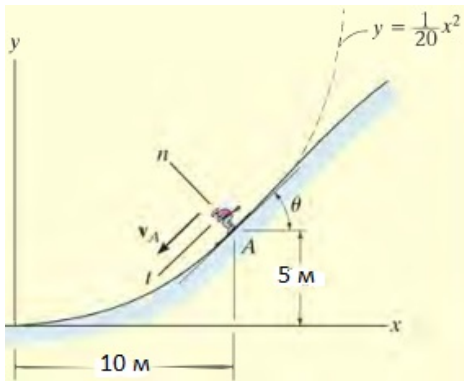
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- ▶ Если траектория движения точки имеет уравнение  $y = f(x)$ , то радиус кривизны в любой точке траектории определяется из уравнения:

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

# Пример 1

Когда лыжник находится в точке  $A$  параболической траектории, его скорость  $6 \text{ м/с}$  и она увеличивается с ускорением  $2 \text{ м/с}^2$ . Найти направление его скорости и направление и величину ускорения лыжника в этой точке. Размеры лыжника не учитывать



# Скорость

Как найти направление вектора скорости?



# Скорость

Так как  $y = \frac{1}{20}x^2$  и  $dy/dx = \frac{1}{10}x$ , то когда  $x = 10$  м,  
 $dy/dx = 1$

Поэтому  $\theta = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$  и

$$v = 6 \text{ м/с}$$

# Ускорение

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_t + (v^2/\rho)\vec{u}_n$$

Чему равно  $\dot{v}$ ?

# Ускорение

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_t + (v^2/\rho)\vec{u}_n$$

Вычислить радиус кривизны траектории в точке A(10 м, 5м)

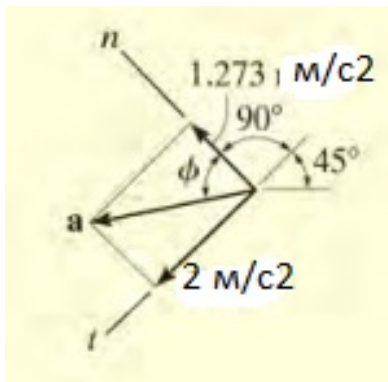
# Радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \frac{[1 + (\frac{1}{10}x)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{10}|} \Bigg|_{x=10M} = 28.28M$$

# Ускорение

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_t + (v^2/\rho)\vec{u}_n$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \dot{v}\vec{u}_t + (v^2/\rho)\vec{u}_n \\ &= 2\vec{u}_t + \frac{(6\text{M}/c)^2}{28.28\text{M}}\vec{u}_n \\ &= (2\vec{u}_t + 1.273\vec{u}_n) \text{ M}/c^2\end{aligned}$$



# Ответ

$$a = \sqrt{(2\text{м/с}^2)^2 + (1.273\text{м/с}^2)^2} = 2.37 \text{ м/с}^2$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2}{1.273} = 57.5^\circ$$

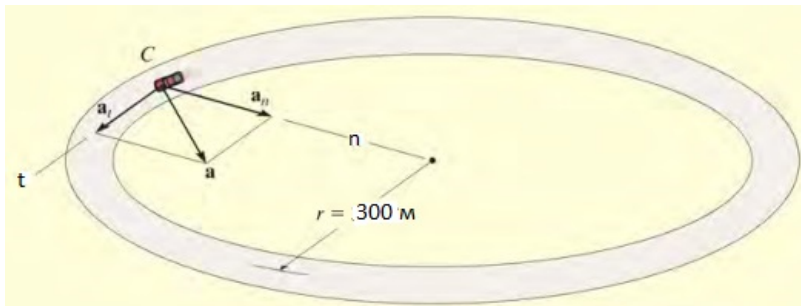
$$45^\circ + 90^\circ + 57.5^\circ - 180^\circ = 12.5^\circ$$

$$a = 2.37 \text{ м/с}^2, \theta = 12.5^\circ \quad \text{Ответ}$$



## Пример 2

Гоночный автомобиль С едет по горизонтальной траектории имеющей форму окружности с радиусом 300 м. Величина скорости автомобиля увеличивается с постоянным ускорением  $7 \text{ м/с}^2$  и он начинает движение из состояния покоя. Определить время, которое необходимо автомобилю чтобы его ускорение стало равным  $8 \text{ м/с}^2$ . Найти скорость автомобиля в этот момент.



$a_t, v, a_n$

Скорость и нормальное ускорение можно выразить через время  $t$

# Ускорение

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \quad a_t = 7 \text{ м/с}^2$$

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$

$$v = 0 + 7t$$

Значит

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163t^2 \text{ м/с}^2$$

# Время

Как теперь вычислить время, необходимое автомобилю чтобы его ускорение стало равным  $8 \text{ м/с}^2$ ?

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

# Время

$$8 \text{ м/с}^2 = \sqrt{(7\text{м/с}^2)^2 + (0.163t^2\text{м/с}^2)^2}$$

$$0.163t^2 \text{ м/с}^2 = \sqrt{(8\text{м/с}^2)^2 - (7\text{м/с}^2)^2}$$

$$t = 4.87 \text{ с}$$

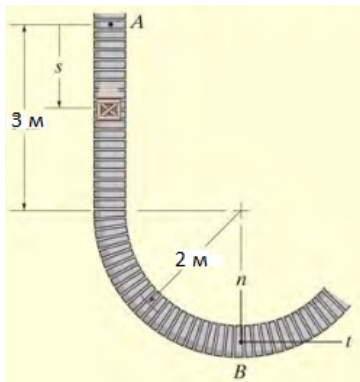
Ответ

# Скорость

$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ м/с} \quad \text{Ответ}$$

## Пример 3

Ящик перемещается по конвейеру и начинает движение из состояния покоя в точке А. Величина скорости увеличивается с ускорением  $a_t = 0.2t$  м/с<sup>2</sup>,  $t$  измеряется в секундах. Найти величину ускорения ящика в точке В



# Ускорение

Выразить  $v$  как функцию от времени  $t$



# Ускорение

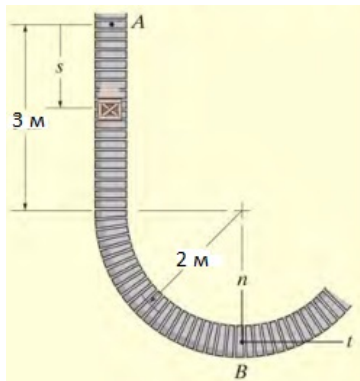
$$a_t = \dot{v} = 0.2t$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.2t dt$$

$$v = 0.1t^2$$

# Время

Как вычислить (дуговую) координату точки В?



# Время

$$s_B = 3 + 2\pi(2)/4 = 6.142 \text{ м}$$

# Время

Вычислить время: когда ящик окажется в точке В?

# Время

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1t^2$$
$$\int_0^{6.142 \text{ M}} ds = \int_0^{t_B} 0.1t^2 dt$$
$$6.142 \text{ M} = 0.0333t_B^3$$
$$t_B = 5.690$$

# Компоненты ускорения в точке В

Найти компоненты ускорения  $(a_B)_t$  и  $(a_B)_n$

## Компоненты ускорения в точке В

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0.2(5.690) = 1.138 \text{ м/с}^2$$

$$v_B = 0.1(5.69)^2 = 3.238 \text{ м/с}$$

В точке В:  $\rho_B = 2 \text{ м}$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3.238 \text{ м/с})^2}{2 \text{ м}} = 5.242 \text{ м/с}^2$$

## Ускорение $a_B$

$$a_B = \sqrt{(1.138\text{м/с}^2)^2 + (5.242\text{м/с}^2)^2} = 5.36\text{м/с}^2 \quad \text{ОТВЕТ}$$



# Задача

Лодка плывет по окружности со скоростью  $v = 0.0625t^2$  м/с,  $t$  измеряется в секундах. Найти величину ускорения лодки, когда  $t = 2$  с

