

Лекция №6: Кинематика точки

Прямолинейное движение

В.Е.Кисляков

April 17, 2015

- 1 Кинематика прямолинейного движения точки
- 2 Постоянное ускорение
- 3 Примеры

Механика

Механика - это часть физики, которая изучает состояние покоя или движения тел, находящихся под действием сил

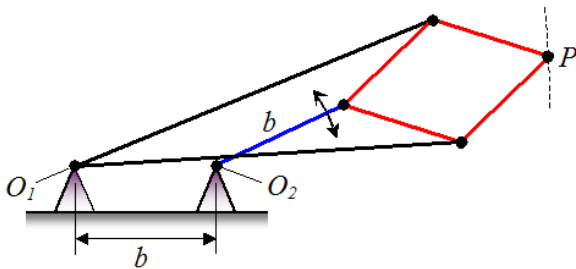
Теоретическая механика состоит из двух частей: статика и динамика

Динамика изучает движение тела с ускорением

Кинематика - это часть динамики, которая имеет дело с геометрическим описанием движения

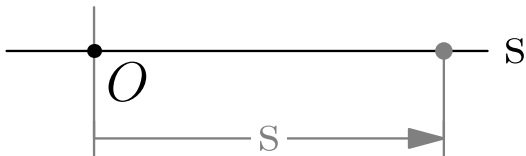
Кинематика

Кинематика точки в каждый момент времени описывается положением точки, её скоростью и ускорением



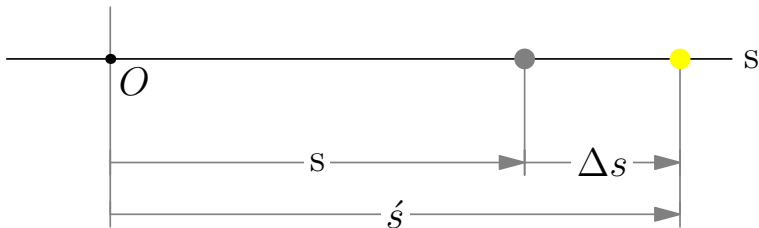
Положение точки

Одна координатная ось s



Перемещение = изменение положения

$$\Delta s = s' - s$$



Расстояние - это положительное число, которое равно общей длине пути, пройденного точкой

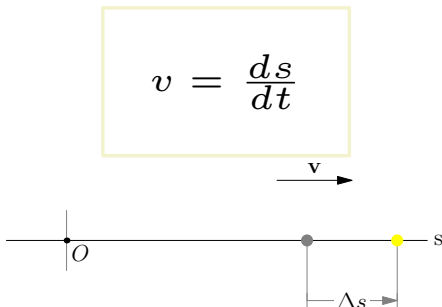
Скорость

Скорость точки

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость точки

(\vec{v})



Средняя скорость

Средняя скорость - это положительное число и определяется как деление общего расстояния, пройденного точкой, на затраченное время

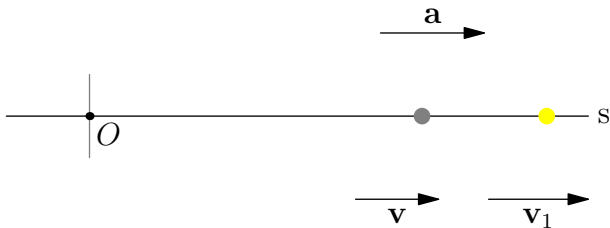
$$v_{\text{cp}} = \frac{s_0}{\Delta t}$$



Ускорение

Среднее ускорение точки

$$a_{\text{cp}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

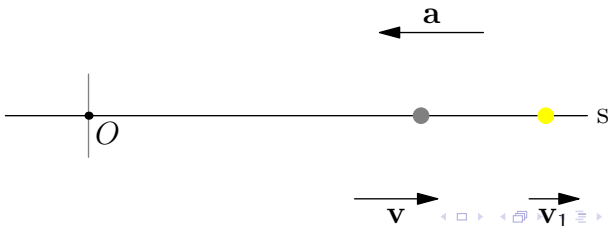


Мгновенное ускорение точки

($\xrightarrow{+}$)

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$(\xrightarrow{+}) \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$



Дифференциальное уравнение: ускорение, скорость, перемещение

$$a ds = v dv$$

Постоянное ускорение

$$a = a_c$$

$$a_c = dv/dt$$

$$v = ds/dt$$

$$a_c ds = v dv$$

Скорость как функция времени

$$a_c = dv/dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_c dt$$

($\xrightarrow{+}$)

$$v = v_0 + a_c t$$

Положение точки как функция времени

$$v = ds/dt = v_0 + a_c t$$

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt$$

($\overset{+}{\rightarrow}$)

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

Скорость как функция положения точки

$$v dv = a_c ds$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{s_0}^s a_c ds$$

($\overset{+}{\rightarrow}$)

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

Это важно!

- Динамика изучает тела, которые движутся с ускорением
- Кинематика - это геометрия движения
- Средняя скорость - это общее расстояние, пройденное точкой разделить на общее время
- Если точка замедляется значит вектор ускорения направлен в противоположную движению сторону
- Уравнение $ads = vdv$ получается из $a = dv/dt$ и $v = ds/dt$

Методические указания для решения задач

Система координат

- Направить координатную ось s вдоль пути и определить начало отсчета t_0 и положительное направление
- Положение точки, её скорость и ускорение - это скалярные величины. Направление этих величин определяется алгебраическим знаком
- Положительное направление для s , v , a указывается стрелкой рядом с кинематическим уравнением

Уравнения кинематики

- Если известны соотношения между двумя из четырех переменных: a , v , s , t , то третью переменную можно получить с помощью трех уравнений кинематики:
 $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ и $ads = vdv$
- Для вычисления интегралов в кинематических уравнениях, необходимы начальные условия: $s = s_0$ и $v = v_0$, когда $t = 0$

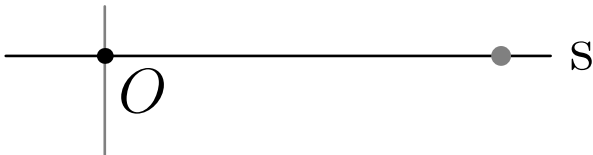
Пример

Автомобиль движется прямолинейно так, что $v = (3t^2 + 2t)$ м/с, здесь t измеряется в секундах. Найти положение автомобиля и его ускорение, когда $t = 3$ с. При $t = 0 : s = 0$



Решение

Координатная ось



Положение автомобиля

$$\left(\overset{+}{\rightarrow}\right) \quad v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t) dt$$

$$s|_0^s = t^3 + t^2|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

Когда $t = 3$ с

$$s = 3^3 + 3^2 = 36 \text{ м} \quad \text{Ответ}$$

Ускорение

$$\begin{aligned}(\vec{+}) \quad a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t) \\ &= 6t + 2\end{aligned}$$

Когда $t = 3$ с

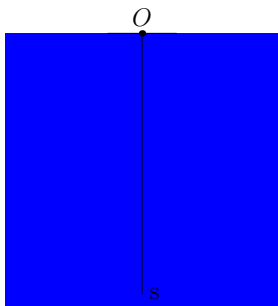
$$a = 6(3) + 2 = 20 \text{ м/с}^2 \quad \text{Ответ}$$

Пример

Небольшой снаряд был выпущен вертикально вниз в воду с начальной скоростью 60 м/с. Благодаря сопротивлению воды снаряд испытывает замедление с ускорением $a = (-0.4v^3)$ м/с², где v измеряется в м/с. Найти положение снаряда и его скорость спустя 4 с после начала движения

Решение

Координатная ось



Скорость

$$v = v_0 + a_c t??$$

$$(+ \downarrow) \quad a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60 \text{ м/с}}^v \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4} \left(\frac{1}{-2} \right) \frac{1}{v^2} \Big|_{60}^v = t - 0$$

$$\frac{1}{0.8} \left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{60^2} \right] = t$$

Скорость

$$v = \left(\left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{-1/2} \right) \text{ м/с}$$

Когда $t = 4$ с:

$$v = 0.559 \text{ м/с} \downarrow$$

Положение

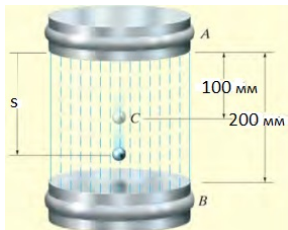
$$\begin{aligned} (+ \downarrow) \quad v &= \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{-1/2} \\ \int_0^s ds &= \int_0^t \left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{-1/2} dt \\ s &= \frac{2}{0.8} \left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{1/2} \Big|_0^t \\ s &= \frac{1}{0.4} \left(\left[\frac{1}{60^2} + 0.8t \right]^{1/2} - \frac{1}{60} \right) \text{ м} \end{aligned}$$

Когда $t = 4$ с:

$$s = 4.43 \text{ м}$$

Пример

Металлическая частица под действием магнитного поля между пластинами А и В падает вертикально вниз. Частица начинает движение из состояния покоя в точке С, $s = 100$ мм, с ускорением $a = 4s$ м/с², где s измеряется в метрах. Определить скорость частицы, когда она достигнет пластины В, $s = 200$ мм, и время, за которое частица пройдет этот путь



Решение. Скорость

$$(+ \downarrow) \quad vdv = ads$$

$$\int_0^v vdv = \int_{0.1M}^s 4sds$$

$$\frac{1}{2}v^2 \Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2 \Big|_{0.1M}^s$$

$$v = 2(s^2 - 0.01)^{1/2} \text{ м/с}$$

Когда $s = 200 \text{ мм} = 0.2 \text{ м}$:

$$v_B = 0.346 \text{ м/с} = 346 \text{ мм/с} \downarrow \quad \text{Ответ}$$

Время

Когда $t = 0$: $s = 0.1$ м

$$\begin{aligned} (+ \downarrow) \quad ds &= v dt \\ &= 2(s^2 - 0.01)^{1/2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0.1}^s \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} &= \int_0^t 2 dt \\ \ln(\sqrt{s^2 - 0.01} + s) \Big|_{0.1}^s &= 2t \Big|_0^t \\ \ln(\sqrt{s^2 - 0.01} + s) + 2.303 &= 2t \end{aligned}$$

Ответ

Когда $s = 0.2$ м:

$$t = \frac{\ln(\sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2) + 2.303}{2} = 0.658 \text{ с}$$