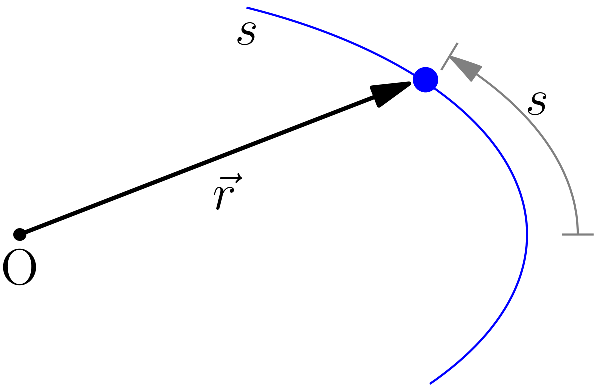
Лекция №7:Криволинейное движение точки

В.Е.Кисляков

May 4, 2015

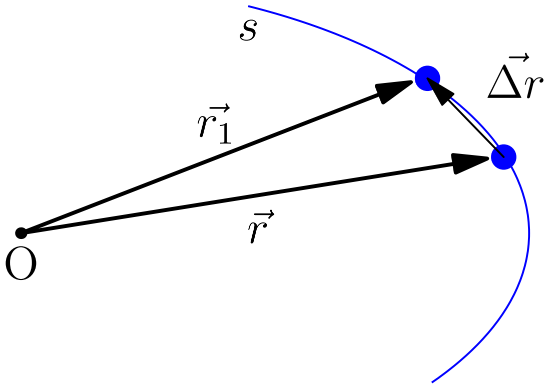
1. Криволинейное движение
2. Прямоугольная система координат
3. Примеры
4. Нормальная и тангенциальная компоненты

Положение точки



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

Перемещение



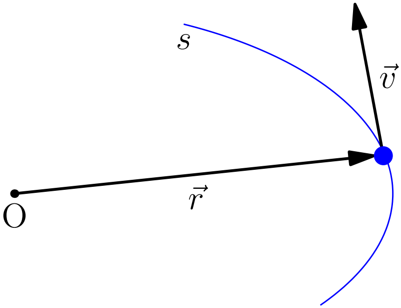
$$\vec{r_1} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r}$$

Скорость

$$v\,\vec{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

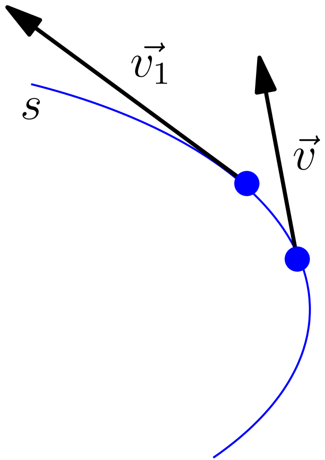
$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Скорость



$$v = \frac{ds}{dt}$$

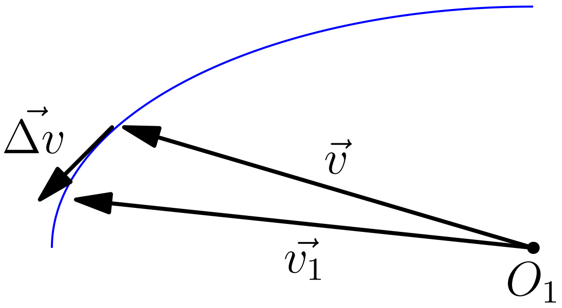
Ускорение



$\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ в момент времени $t + \Delta t$

Годограф

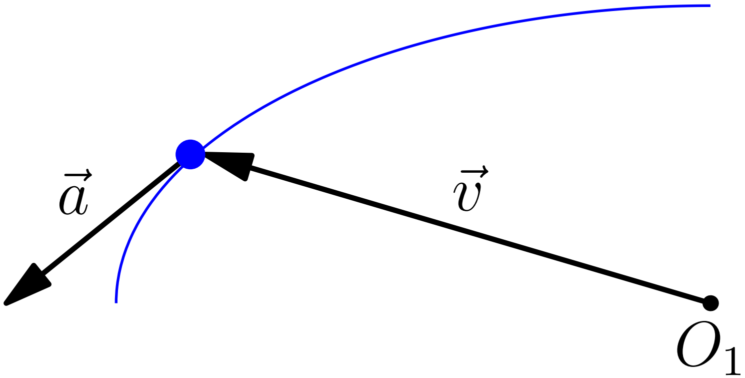
$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

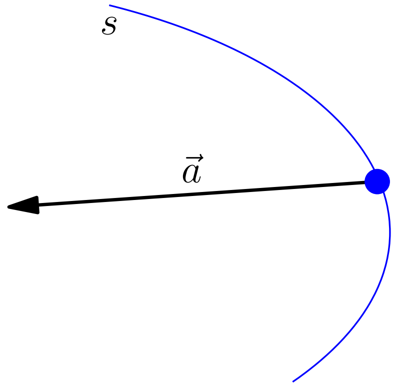


Мгновенное ускорение

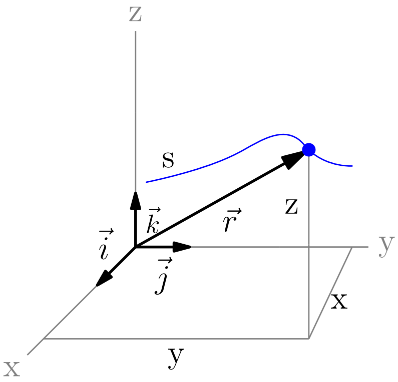
$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$


$\vec{a}$
$\vec{v}$
O_1


s
$\vec{a}$

Положение точки



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

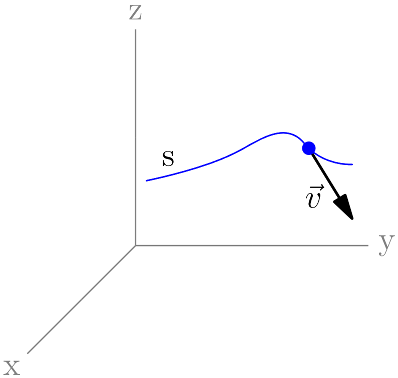
$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

Так как

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Скорость



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx\vec{i}}{dt} + \frac{dy\vec{j}}{dt} + \frac{dz\vec{k}}{dt}$$

$$\frac{dx\vec{i}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}}$$

$$\boxed{v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

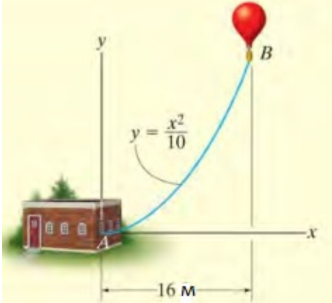
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$
$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$
$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

Это важно!

- При криволинейном движении изменяются как направление, так и величина векторов положения, скорости и ускорения точки
- Вектор скорости направлен всегда по касательной к траектории
- В общем случае вектор ускорения не направлен по касательной к траектории, но направлен по касательной к годографу

Пример

В любой момент времени горизонтальное положение воздушного шара определяется по формуле $x = 8t$ м, t измеряется в секундах. Уравнение траектории $y = x^2/10$. Найти величину и направление скорости и ускорения, когда $t = 2$ с



Решение.Скорость

$$v_x = \dot{x} = \frac{d8t}{dt} = 8 \text{ м/с} \rightarrow$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dx^2/10}{dt} = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25.6 \text{ м/с}$$

когда $t = 2$ с

$$v = \sqrt{(8 \text{ м/с})^2 + (25.6 \text{ м/с})^2} = 26.8 \text{ м/с}$$ Ответ

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6^\circ$$

Ускорение

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{d8}{dt} = 0$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{2x\dot{x}/10}{dt} = (2\dot{x})\dot{x}/10 + 2x\ddot{x}/10$$
$$= 2(8^2)/10 + 2(16)(0)/10 = 12.8 \text{ м/с}^2 \uparrow$$

Поэтому

$$a = \sqrt{0^2 + (12.8)^2} = 12.8 \text{ м/с}^2 \qquad \text{Ответ}$$

$$\theta_a = \tan^{-1}\frac{12.8}{0} = 90^\circ \qquad \text{Ответ}$$

Пример

Если промежуток времени небольшой, то траектория имеет уравнение $y = (0.001)x^2$. Аэроплан взлетает с постоянной скоростью. Найти величину его скорости и ускорения на высоте $y = 100$ м

Решение

Если $y = 100$ м, то $100 = 0.001x^2$ или $x = 316.2$ м
Так как $v_y = 10$ м/с, то

$$y = v_y t \quad 100 \text{ м} = (10 \text{ м/с})t \quad t = 10 \text{ с}$$

Скорость

$$v_y = \dot{y} = \frac{d(0.001x^2)}{dt} = (0.002x)\dot{x} = 0.002xv_x$$

Значит

$$10\ \text{м/с} = 0.002(316.2\ \text{м})v_x$$

$$v_x = 15.81\ \text{м/с}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15.81\ \text{м/с})^2 + (10\ \text{м/с})^2} = 18.7\ \text{м/с} \quad \text{Ответ}$$

Ускорение

$$a_y = \dot{v}_y = 0.002\dot{x}v_x + 0.002x\dot{v}_x = 0.002(v_x^2 + xa_x)$$

Когда $x = 316.2$ м, то $v_x = 15.81$ м/с и $\dot{v}_y = a_y = 0$

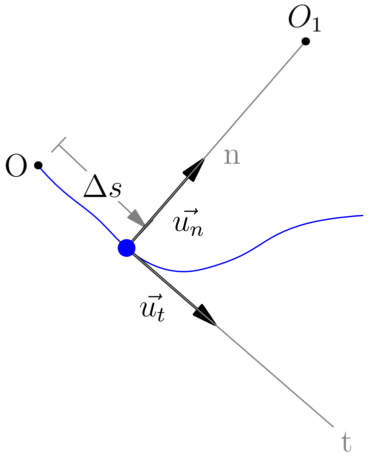
$$0 = 0.002((15.81 \text{ м/с})^2 + 316.2 \text{ м}(a_x))$$

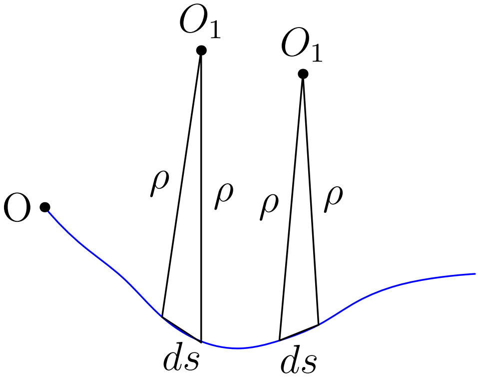
$$a_x = -0.791 \text{ м/с}^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.791 \text{ м/с}^2)^2 + (0 \text{ м/с}^2)^2} = 0.791 \text{ м/с}^2$$

Ответ

Плоское движение




O_1
O_1
ρ
ρ
ρ
ρ
O
ds
ds

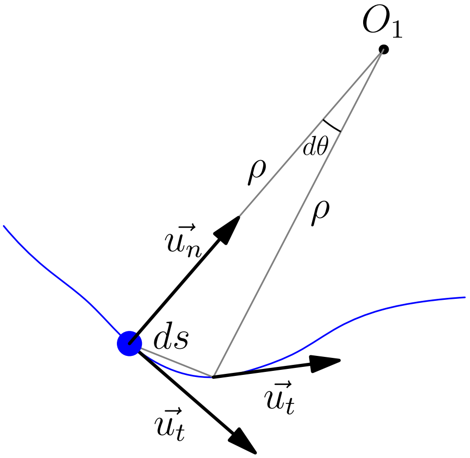
Скорость

$v = ds/dt$

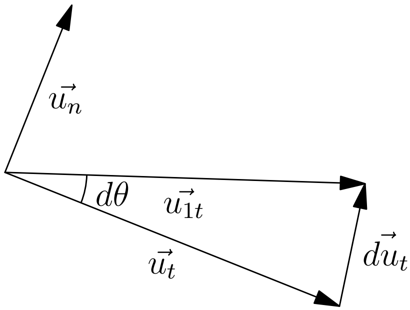
$$\boxed{\vec{v} = v\vec{u}_t}$$

$$\boxed{v = \dot{s}}$$

Ускорение

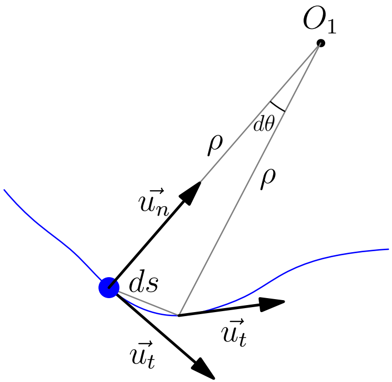


$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{u_t} + v\dot{\vec{u_t}}$$



$$\vec{u_{1t}} = \vec{u_t} + \vec{du_t}, \quad du_t = (1)d\theta, \quad \vec{du_t} = d\theta\vec{u_n}$$

$$\dot{\vec{u_t}} = \dot{\theta}\vec{u_n}$$



$ds = \rho d\theta,\ \dot{\theta} = \dot{s}/\rho$

$$\vec{u_t} = \dot{\theta}\vec{u_n} = \frac{\dot{s}}{\rho}\vec{u_n} = \frac{v}{\rho}\vec{u_n}$$

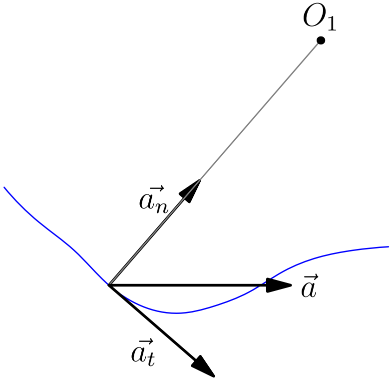
$$\vec{a} = a_t \vec{u_t} + a_n \vec{u_n}$$

Где

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_t ds = v dv$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$



$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Два случая движения точки

- Прямолинейное движение: $\rho \to \infty$ и $a_n = 0$. Значит $a = a_t = \dot{v}$
  Тангенциальное ускорение измеряет изменение по времени величины скорости
- Точка движется по криволинейной траектории с постоянной скоростью: $a_t = \dot{v} = 0$
  и $a = a_n = v^2/\rho$
  Нормальное ускорение измеряет изменение по времени направления вектора скорости

Движение точки в пространстве